Михаил Богомолов, 8а 1.02.2013

# Великая теорема Ферма

*Не существует отличных от нуля целых чисел $x, y, z$ таких, что верно равенство*

$$\boxed{x^n + y^n = z^n, \text{при натуральном } n > 2.}$$

> ***«Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere; cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.»***

## Хронология доказательства:

1637 – формулировка Ферма, чуть позже доказательство для $n = 4$.
1770 – доказательство Эйлера для $n = 3$.
1825 – доказательство Дирихле и Лежандра для $n = 5$.
1832 – доказательство Дирихле для $n = 14$.
1839 – доказательство Ламе для $n = 7$.
1846 – открытие Куммером идеальных чисел.
1929 – открытие Вандивером условий, позволяющих проверять истинность теоремы для любого простого показателя.
1995 – доказательство Эндрю Уайлса Великой теоремы Ферма.

## Примитивные пифагоровы тройки

Def. Примитивной пифагоровой тройкой называется такая тройка чисел $x, y, z$, что $x^2 + y^2 = z^2$ и $\text{НОД}(x, y, z) = 1$.

Все примитивные пифагоровы тройки представимы в виде таких взаимно простых положительных целых $p$ и $q$, что $p > q$, $p$ и $q$ имеют противоположную чётность, и данная тройка состоит из чисел $2pq$, $p^2 - q^2$ и $p^2 + q^2$.

## Метод бесконечного спуска

Def. Метод бесконечного спуска – доказательство от противного, основанное на том, что множество натуральных чисел вполне упорядочено (то есть для каждого его подмножества есть минимальный элемент).

Из предположения, что решение существует, вытекает существование другого решения, которое в некотором смысле меньше. Тогда можно построить бесконечную цепочку решений, каждое из которых меньше предыдущего. Это вызывает противоречие с тем, что в любом подмножестве множества натуральных чисел есть минимальный элемент, значит предположение о существовании начального решения неверно.

Этот метод был изобретён Ферма.

## Доказательство Великой теоремы Ферма для n=4

1) Предположим, что существуют такие $x, y, z,$ что верно $x^4 + y^4 = z^4$. Если НОД$(x, y, z) = 1$ (иначе – сократить на четвёртую степень НОД), то это примитивная пифагорова тройка, $x^2 = 2pq$, $y^2 = p^2 - q^2$ и $z^2 = p^2 + q^2$, при этом $p > q > 0$, и НОД$(p, q) = 1$.
2) $y^2 = p^2 - q^2 \Leftrightarrow y^2 + q^2 = p^2$. Это тоже примитивная пифагорова тройка, так как $q$ и $p$ взаимно просты. $y$ нечётен, значит $q$ чётно, и $q = 2ab, y = a^2 - b^2, p = a^2 + b^2$, где $a$ и $b$ – взаимно простые числа разной чётности, причём $a > b > 0$.
3) $x^2 = 2pq = 4ab(a^2 + b^2)$. Из этого видно, что $ab(a^2 + b^2)$ – квадрат. $a$, $b$ и $a^2 + b^2$ взаимно просты. Значит, каждое из них в отдельности тоже является квадратом, например, $a = X^2$ и $b = Y^2$. Так как $a^2 + b^2$ является квадратом, то и $X^4 + Y^4$ является квадратом. Чтобы запустить бесконечный спуск, надо заметить, что мы решили, что $x^4 + y^4$ является только квадратом, а не четвёртой степенью. В итоге мы пришли к меньшим $X$ и $Y$, таким, что $X^4 + Y^4$ – квадрат. Следовательно, сумма четвёртых степеней двух чисел не может быть даже квадратом, не говоря уже о четвёртых степенях.

## Ссылки:

http://www.ega-math.narod.ru/Books/Edwards.htm – Г. Эдвардс – «Последняя теорема»

http://ru.wikipedia.org/wiki/Великая_Теорема_Ферма

http://ru.wikipedia.org/wiki/Пифагорова_Тройка